# Woche 5

Freitag, 24. März 2023 12:56

## ODE's

**Def.:** Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung hat die Form

$$\vec{y}^{(n)} = \vec{f}(t, \vec{y}, \vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n-1)}) \text{ mit } \vec{y} \in \mathbb{R}^d \text{ und } \vec{y}^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$$

**Bsp.:** $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y})$ ist eine ODE erster Ordnung

Eine ODE heißt <u>autonom</u>, falls $f$ unabhängig von $t$ ist, also $\vec{y}^{(n)} = \vec{f}(\vec{y}, \dots, \vec{y}^{(n-1)})$

**Bemerkung:** Durch Einführen neuer Variablen lässt sich jede ODE in eine autonome ODE erster Ordnung umwandeln. Daher genügt es oft, sich auf numerische Verfahren für diesen Fall zu beschränken.

**Beispiel:** $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = g(t)$ (ODE 2-ter Ordnung)

Definiere $z(t) = (y, \dot{y})$

Somit gilt:

$$\frac{d}{dt} z = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ g(t) - p(t)\dot{y} - q(t)y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_{z(t)} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} =: F(t, z)$$

**Notation:** $y_n \approx y(t_n)$ bezeichnet die numerische Approximation von $y$ zur Zeit $t_n$.

Eine ODE heißt implizit, falls die Lösung eines nicht-linearen Systems nötig ist um $y_{n+1}$ zu erhalten.

Damit die Lösung unserer ODE eindeutig ist, benötigen wir Anfangsbedingungen. Ein solches Problem heißt dann AWP:

AWP = ODE + Anfangsbedingungen

$\rightarrow$ Für eine ODE n-ter Ordnung benötigen wir n Anfangsbedingungen

**Lösungsverfahren:**

- explizter Euler: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$, die Ableitung bei $t_n$ wird durch den Vorwärts-Differenzenquotienten approximiert: $f(t_n, y(t_n)) = \dot{y}(t_n) \approx \frac{y(t_n+h) - y(t_n)}{h}$

  Taylor-approx (1-Schritt)

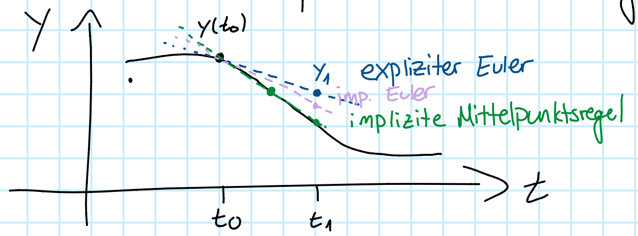
  wobei $y_{n+1} = y(t_n + h)$

  (Gerade mit Steigung vom Startpunkt)

  h: Schrittweite

- Impliziter Euler: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$ (Gerade mit Steigung vom Endpunkt)
- Implizite Mittelpunktsregel: $y_{n+1} = y_n + h f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$ (Steigung vom Mittelpunkt)

Warum schauen wir implizite Verfahren an? Die implizite Mittelpunktregel z.B. ist strukturerhaltend, i.e. sie hält Energie konstant




**Def.: Konvergenzordnung**

$t_{end} = t_0 + Nh$

Fehler: $E(n) = \| y_{exakt}(t_{end}) - y_N \|$

Ein Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 0$, falls $\exists C > 0$ s.d.

$\forall n \in \mathbb{N}: \; E(n) \leq C \cdot h^p, \quad h := \frac{t_{end} - t_0}{N}$

**Autonomisieren:** Es gibt Verfahren die nicht explizit von der Zeit abhängen dürfen $\Rightarrow$ Wir lösen dieses Problem, indem wir die Zeit als zusätzliche Variable schreiben

Allgemeines AWP:
$$\begin{cases} \vec{y}^{(n)} = f(t, \vec{y}, \vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n-1)}) \\ \vec{y}^{(i)}(t_0) = \vec{y}_0^{\,i}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Transformiere zu:
$$z(t) := (\vec{y}, \dots, \vec{y}^{(n-1)}, t)$$
$$\dot{z}(t) := (\vec{y}, \dots, f(t, \vec{y}, \dots, \vec{y}^{(n-1)}), 1) =: g(\vec{z})$$

und $g$ ist nicht explizit von $t$ abhängig!

**Strömer-Verlet-Verfahren:** Lösen von ODE's der Form $\ddot{y} = f(t, y)$ (benötigen 2 Startwerte). Wieso diese Verfahren? Sie sind strukturerhaltend!

- Strömer-Verlet: $y_{n+1} = -y_{n-1} + 2y_n + h^2 f(t_n, y_n)$ (zwei Schritt-Verfahren)
- Leap-Frog: $y_{n+1} = y_n + h v_{n+1/2}$ (Einschrittverfahren)

  $v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + h \cdot f(t_n, y_n)$